# TEORIA DELLA STIMA

Michele TARAGNA

*Dipartimento di Automatica e Informatica*

*Politecnico di Torino*

michele.taragna@polito.it


XI Scuola Nazionale di Dottorato “Antonio Ruberti”

Corso di **“Identificazione di sistemi non lineari”**

Bertinoro, 9-11 Luglio 2007

# Problema della stima

Il problema della stima riguarda la valutazione empirica di una grandezza incerta, come di un parametro caratteristico ignoto o di un segnale remoto, sulla base di osservazioni e misure sperimentali rilevate nello studio del fenomeno.

Un problema di stima presuppone sempre un'adeguata descrizione matematica (*modello*) del fenomeno:

- nella statistica classica, di solito si affrontano problemi relativi a modelli statici, caratterizzati da legami istantanei (o algebrici) fra le grandezze in gioco;
- in questo corso, si presentano metodi di stima per fenomeni che sono descritti adeguatamente da *modelli dinamici a tempo discreto*, caratterizzati da legami fra le variabili in gioco rappresentabili nella loro evoluzione temporale mediante equazioni alle differenze (per semplicità si assume cioè che il tempo sia discreto).

# Problema della stima

$\vartheta(t)$ : grandezza *reale* da stimare, scalare o vettoriale, costante o variabile nel tempo;

$d(t)$ : dati disponibili, rilevati a certi $N$ istanti di tempo $t_1, t_2, \ldots, t_N$;

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ : insieme degli istanti di osservazione, distribuiti con cadenza regolare (in tal caso, $T = \{1, 2, \ldots, N\}$) o non uniforme;

$d = \{d(t_1), d(t_2), \ldots, d(t_N)\}$ : insieme delle osservazioni.

Uno **stimatore** (o **algoritmo di stima**) è una *funzione* $f(\cdot)$ che associa ai dati un valore della grandezza da stimare:

$$\vartheta(t) = f(d)$$

Per **stima** si intende il particolare *valore* assunto dallo stimatore in corrispondenza ai particolari dati osservati.

# Classificazione dei problemi di stima

1) $\vartheta(t)$ è costante nel tempo => problema di **identificazione parametrica**:
   - lo stimatore si indica con $\hat{\vartheta}$ oppure con $\hat{\vartheta}_T$;
   - il valore vero della grandezza incognita si indica con $\vartheta^o$;

2) $\vartheta(t)$ è funzione del tempo:
   - lo stimatore si indica con $\hat{\vartheta}\left(t|T\right)$ , oppure con $\hat{\vartheta}\left(t|N\right)$ se gli istanti di osservazione sono distribuiti con cadenza regolare;
   - a seconda della posizione di $t$ rispetto all'ultimo istante di osservazione $t_N$:

   2.a) se $t > t_N$ => problema di **predizione**;

   2.b) se $t = t_N$ => problema di **filtraggio**;

   2.c) se $t_1 < t < t_N$ => problema di **regolarizzazione** (o di **interpolazione** o di **smoothing**).

# Esempio di problema di predizione: analisi delle serie temporali

Data una sequenza di osservazioni (serie temporale o storica) di una variabile $y$:

$$y(1), y(2), \ldots, y(t)$$

si vuole valutare il valore successivo $y(t+1)$ della stessa variabile

$$\Downarrow$$

occorre trovare un buon **predittore** $\hat{y}(t+1|t)$, cioè una funzione dei dati disponibili che fornisca una valutazione il più possibile accurata del valore successivo:

$$\hat{y}(t+1|t) = f\left(y(t), y(t-1), \ldots, y(1)\right) \cong y(t+1)$$

Un predittore si dice *lineare* se è una funzione lineare dei dati:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) + \ldots + a_t(t)y(1) = \sum_{k=1}^{t} a_k(t)y(t-k+1)$$

Un predittore lineare è *a memoria finita* $n$ se è funzione lineare solo degli ultimi $n$ dati:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) + \ldots + a_n(t)y(t-n+1) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)y(t-k+1)$$

Se i parametri $a_i(t)$ sono costanti nel tempo, il predittore è anche *tempo-invariante*:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1 y(t) + a_2 y(t-1) + \ldots + a_n y(t-n+1) = \sum_{k=1}^{n} a_k y(t-k+1)$$

ed è individuato dal vettore di parametri costanti nel tempo

$$\vartheta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

il problema di predizione è ricondotto ad un problema di identificazione parametrica.

Problemi:

- come valutare la bontà del predittore?
- come determinare il predittore migliore?

Se il modello predittivo del fenomeno è lineare, tempo-invariante, a memoria finita $n$ molto minore del numero di dati misurati fino all'istante $t$, è possibile valutarne la capacità predittiva sui dati già noti $y(i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$, nel modo seguente:

- ad ogni istante $i \geq n$, si calcola la predizione $\hat{y}(i+1|i)$ del valore successivo:
  $\hat{y}(i+1|i) = a_1 y(i) + a_2 y(i-1) + \ldots + a_n y(i-n+1) = \sum_{k=1}^{n} a_k y(i-k+1)$
  e se ne valuta l'*errore di predizione* $\varepsilon\,(i+1)$ rispetto al dato $y(i+1)$:
  $$\varepsilon(i+1) = y(i+1) - \hat{y}(i+1|i)$$
- il modello descritto da $\vartheta$ è un buon modello predittivo quando l'errore $\varepsilon$ risulta "piccolo" su tutto l'arco dei dati disponibili $\Rightarrow$ si introduce la cifra di merito:
  $$J(\vartheta) = \sum_{k=n+1}^{t} \varepsilon(k)^2$$
- il miglior predittore è quello che minimizza $J$ e che ha come valore dei parametri:
  $$\vartheta^* = \arg\min_{\vartheta \in \mathbb{R}^n} J(\vartheta)$$

Questione fondamentale: il predittore che minimizza $J$ è per forza un "buon" modello?

La bontà del predittore è legata al fatto che l'andamento temporale della sequenza degli errori di predizione $\varepsilon(\cdot)$ presenti le seguenti caratteristiche:

- deve essere a valor medio nullo, cioè non deve presentare un errore sistematico;
- deve essere "del tutto casuale", cioè non deve contenere elementi di regolarità.

In termini probabilistici, il tutto equivale a richiedere che l'andamento dell'errore $\varepsilon(\cdot)$ sia quello di un **rumore bianco** (White Noise, $WN$), ossia di una sequenza di variabili casuali indipendenti con valor medio nullo e varianza costante $\sigma^2$:

$$\varepsilon(\cdot) = WN\left(0, \sigma^2\right)$$

$$\Downarrow$$

Un predittore è un "buon" modello se $\varepsilon(\cdot)$ ha le caratteristiche probabilistiche di un rumore bianco.

Il problema di predizione si può ricondurre così allo studio di un **sistema stocastico**, cioè di un sistema dinamico alimentato da segnali descritti probabilisticamente; infatti:

$$\begin{cases} \hat{y}(t|t-1) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots + a_n y(t-n) \\ \varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(t) = \hat{y}(t|t-1) + \varepsilon(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots + a_n y(t-n) + \varepsilon(t)$$

rappresenta un sistema dinamico a tempo discreto lineare tempo-invariante con uscita $y(t)$ e ingresso $\varepsilon(t)$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{Z}$-trasformando e ricordando che $\mathcal{Z}[y(t-k)] = z^{-k}Y(z)$, essendo $z^{-1}$ l'operatore di ritardo unitario:

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) + \varepsilon(z)$$

$$\Downarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_n z^{-n}} = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \ldots - a_n}$$

rappresenta la funzione di trasferimento del sistema dinamico LTI $\Rightarrow$ per essere un "buon" modello, il suo ingresso $\varepsilon(\cdot)$ deve possedere le caratteristiche probabilistiche di un rumore bianco.

# Tipologie di descrizione dei dati

- Le informazioni effettivamente disponibili sono sempre:
  - limitate $\Rightarrow$ $N$ è necessariamente finito;
  - affette da incertezza di diversa natura (es. rumore di misura).

- L'incertezza presente nei dati può essere descritta:
  - in termini probabilistici $\Rightarrow$ si parla di **stima statistica** o **classica**;
  - in termini insiemistici, come appartenente ad un certo insieme (*set*) limitato $\Rightarrow$ si parla di **stima Set Membership** o **Unknown But Bounded** (UBB).

# Esperimento casuale e sorgente casuale di dati

$S$ : **spazio degli esiti**, cioè l'insieme dei possibili esiti $s$ dell'esperimento casuale;

$\mathcal{F}$ : **spazio degli eventi di interesse**, cioè l'insieme delle combinazioni di interesse in cui gli esiti in $S$ possono essere raggruppati;

$P(\cdot)$ : funzione **probabilità** definita in $\mathcal{F}$ che associa ad ogni evento in $\mathcal{F}$ un numero reale compreso fra $0$ e $1$.

$\mathcal{E} = (S, \mathcal{F}, P(\cdot))$ : **esperimento casuale**

Esempio: lancio un dado a sei facce e guardo se esce un numero pari o dispari $\Rightarrow$

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è l'insieme delle 6 facce del dado;
- $\mathcal{F} = \{A, B, S, \emptyset\}$, essendo $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ gli eventi di interesse, ossia gli insiemi dei numeri pari e dispari;
- $P(A) = P(B) = 1/2$ (se il dado non è truccato), $P(S) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Una **variabile casuale** (o aleatoria) sull'esperimento $\mathcal{E}$ è una variabile $v$ i cui valori dipendono dall'esito $s$ di $\mathcal{E}$ attraverso un'opportuna funzione $\varphi(\cdot) : S \rightarrow V$, essendo $V$ l'insieme dei valori assunti da $v$:

$$v = \varphi(s)$$

Esempio: si può definire la variabile casuale dipendente dall'esito del lancio del dado a sei facce

$$v = \varphi(s) = \begin{cases} +1 & \text{se } s \in A = \{2, 4, 6\} \\ -1 & \text{se } s \in B = \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Una **sorgente casuale di dati** genera dati che, oltre che dal processo in esame caratterizzato dal valore vero incognito $\vartheta^o$ della grandezza da stimare, sono anche funzioni di una variabile casuale; in particolare, all'istante $t$, il dato $d(t)$ dipende dalla variabile aleatoria $v(t)$.

# Descrizione probabilistica dei dati

Nel contesto *probabilistico* (o *classico* o *statistico*), si assume che i dati $d$ siano generati da una sorgente casuale di dati $\mathcal{S}$, influenzata:

- dall'esito $s$ di un esperimento casuale $\mathcal{E}$
- dal valore "vero" $\vartheta^o$ della grandezza incognita da stimare

$$d = d\left(s, \vartheta^o\right)$$

$$\Downarrow$$

i dati $d$ sono variabili casuali, in quanto funzioni dell'esito $s$

$$\Downarrow$$

una descrizione probabilistica completa dei dati è costituita dalla conoscenza della sua

- **distribuzione di probabilità** $F(q) = Prob\left\{d\left(s, \vartheta^o\right) \leq q\right\}$ oppure della sua
- **densità di probabilità** $f(q) = \dfrac{dF(q)}{dq}$

# Caratteristiche degli stimatori

Una sorgente casuale di dati $\mathcal{S}$, influenzata dall'esito $s$ di un esperimento casuale $\mathcal{E}$ e dal valore "vero" $\vartheta^o$ della grandezza incognita da stimare, genera i dati $d$:

$$d = d\left(s, \vartheta^o\right)$$

$$\Downarrow$$

i dati $d$ sono variabili casuali, in quanto funzioni dell'esito $s$

$$\Downarrow$$

anche lo stimatore $f(\cdot)$ e la stima $\hat{\vartheta}$ sono variabili casuali, in quanto funzioni di $d$:

$$\hat{\vartheta} = f(d) = f\left(d\left(s, \vartheta^o\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

la bontà di $f(\cdot)$ e di $\hat{\vartheta}$ dipendono dalle loro caratteristiche probabilistiche.

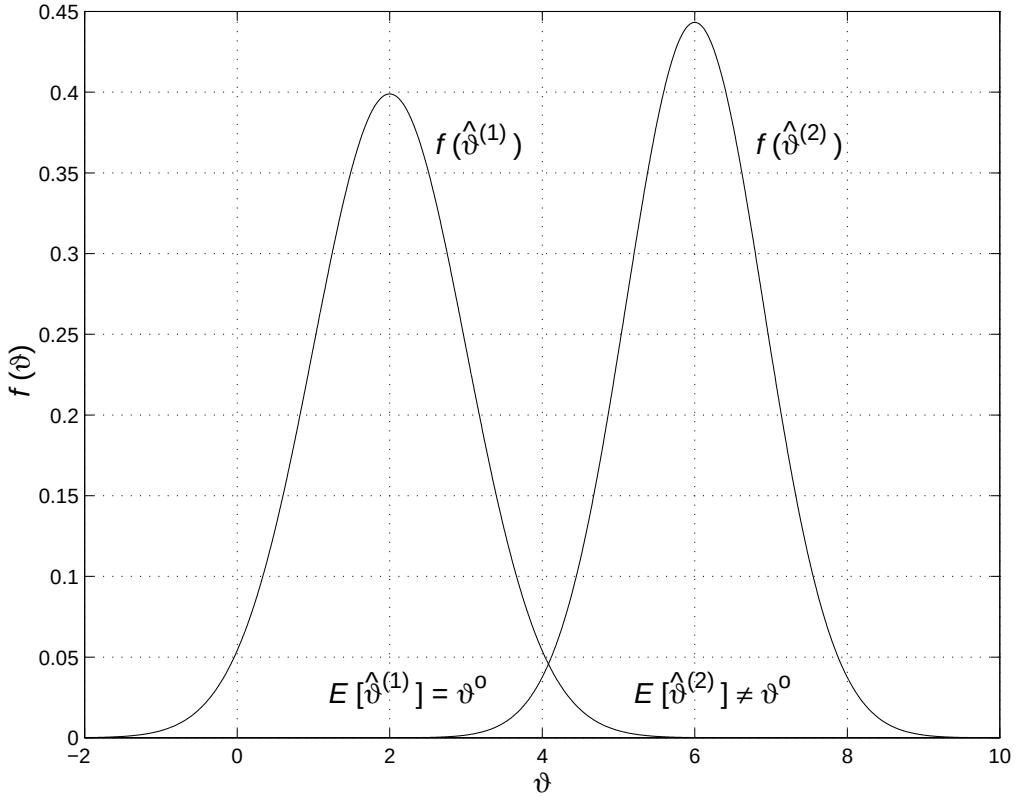
# Caratteristiche probabilistiche degli stimatori

- Non polarizzazione (per evitare di introdurre un errore sistematico di stima)
- Minima varianza (una minore dispersione intorno al valore medio garantisce una probabilità più elevata di ottenere valori vicini al valore "vero" $\vartheta^o$)
- Caratteristiche asintotiche (per $N \to \infty$):
  - convergenza in media quadratica
  - convergenza quasi-certa
  - consistenza

# Caratteristiche probabilistiche degli stimatori

Uno stimatore si dice **corretto** (o **non polarizzato**, o **non deviato**) se

$$E\left[\hat{\vartheta}\right] = \vartheta^o$$

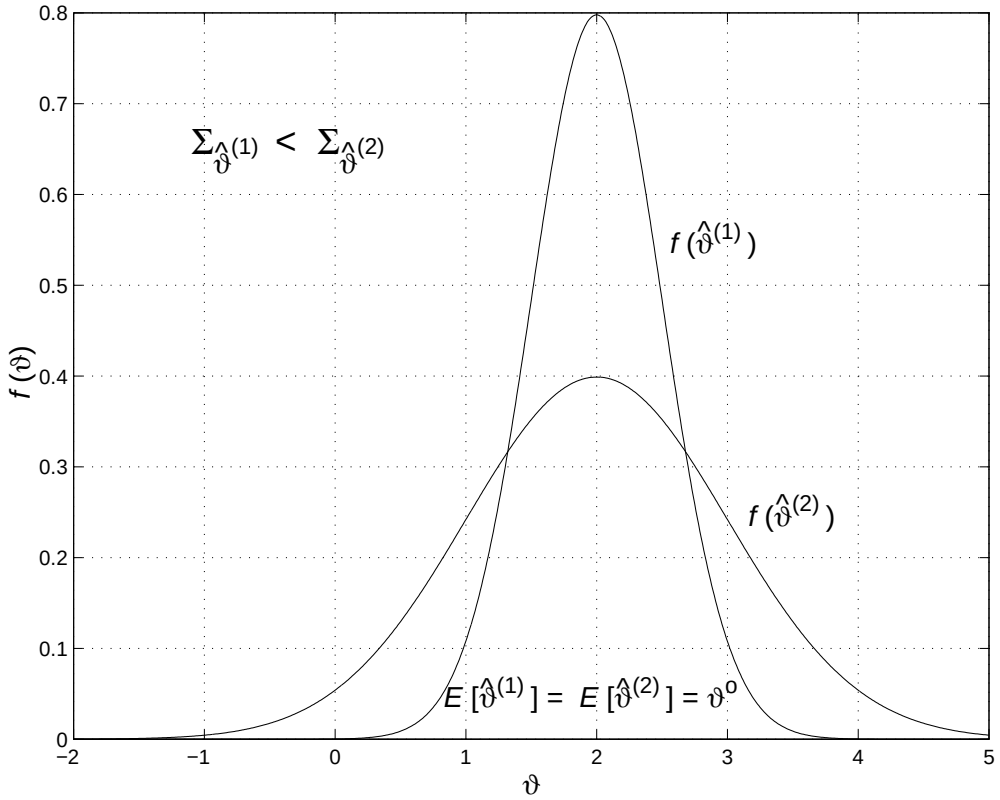



Uno stimatore corretto non introduce cioè un errore sistematico di stima.

# Caratteristiche probabilistiche degli stimatori

Uno stimatore corretto $\hat{\vartheta}^{(1)}$ è a **minima varianza** (o **efficiente**) se

$$Var[\hat{\vartheta}^{(1)}] \leq Var[\hat{\vartheta}^{(2)}], \quad \forall \hat{\vartheta}^{(2)} \neq \hat{\vartheta}^{(1)}$$




Minore dispersione intorno al valore medio $\Rightarrow$ maggiore probabilità di avvicinare $\vartheta^o$.

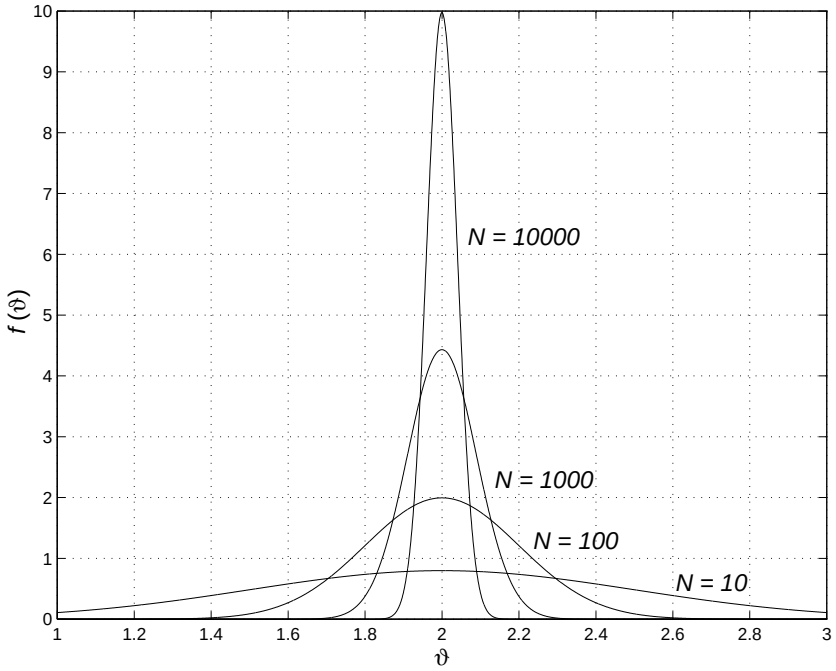
# Caratteristiche asintotiche degli stimatori

Uno stimatore corretto **converge in media quadratica a** $\vartheta^o$, cioè $\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\,\hat{\vartheta}_N = \vartheta^o$, se

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\|\hat{\vartheta}_N - \vartheta^o\|^2\right] = 0$$

dove $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, è la norma euclidea.

Uno stimatore corretto tale che $\lim_{N\to\infty} Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] = 0$ converge in media quadratica:



# Convergenza certa e quasi-certa, consistenza

Uno stimatore è funzione dell'esito $s$ di un esperimento casuale, oltre che di $\vartheta^o$:

$$\hat{\vartheta} = f(d) = f(d(s, \vartheta^o)) \quad \Rightarrow \quad \hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(s, \vartheta^o)$$

Se si considera un particolare esito $\overline{s} \in S$ e si valuta la sequenza delle stime $\hat{\vartheta}_N(\overline{s},\vartheta^o)$ al crescere di $N$, si ottiene una successione numerica $\hat{\vartheta}_1(\overline{s}, \vartheta^o)$, $\hat{\vartheta}_2(\overline{s}, \vartheta^o)$, . . ., che può convergere a $\vartheta^o$ per qualche $\overline{s}$, e non convergere per altri $\overline{s}$.

Sia $A$ l'insieme degli esiti $\overline{s}$ per cui si ha la convergenza a $\vartheta^o$:

- se $A \equiv S$, si parla di **convergenza certa**, avendo luogo $\forall \overline{s} \in S$;
- se $A \subset S$, considerando $A$ come evento si può definire la probabilità $P(A)$; se $A$ è tale che $P(A) = 1$, si dice che $\hat{\vartheta}_N$ converge a $\vartheta^o$ *con probabilità* $1$:

$$\lim_{N \to \infty} \hat{\vartheta}_N = \vartheta^o \qquad q.c.$$

e si parla di **convergenza quasi-certa** (*q.c.*) $\Rightarrow$ l'algoritmo è detto **consistente**.

# Esempio

*Problema:* $N$ dati scalari $d_i$ con lo stesso valore medio $E[d_i] = \vartheta^o$, con varianze $Var[d_i]$ eventualmente diverse ma limitate ($\exists \sigma \in \mathbb{R}_+ : Var[d_i] \leq \sigma^2 < \infty, \forall i$); i dati sono tra loro incorrelati, cioè:

$$E[\{d_i - E[d_i]\}\{d_j - E[d_j]\}] = 0, \quad \forall i \neq j$$

**Stimatore #1 a media campionaria:**

$$\boxed{\hat{\vartheta}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i}$$

- è uno stimatore corretto:

$$E\left[\hat{\vartheta}_N\right] = E\left[\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} d_i\right] = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} E[d_i] = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} \vartheta^o = \vartheta^o$$

- converge in media quadratica:

$$
\begin{aligned}
Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] &= E\left[\left(\hat{\vartheta}_N - E\left[\hat{\vartheta}_N\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N d_i - \vartheta^o\right)^2\right] = \\
&= E\left[\left(\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N d_i - \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N \vartheta^o\right)^2\right] = E\left[\left(\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N (d_i - \vartheta^o)\right)^2\right] = \\
&= E\left[\tfrac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^N (d_i - \vartheta^o)\right)^2\right] = \tfrac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N (d_i - \vartheta^o)\right)^2\right] = \\
&= \tfrac{1}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^N (d_i - \vartheta^o)^2 + \sum_{i=1}^N (d_i - \vartheta^o)\sum_{j=1, j\neq i}^N (d_j - \vartheta^o)\right] = \\
&= \tfrac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^N E\left[(d_i - \vartheta^o)^2\right] + \sum_{i=1}^N E\left[(d_i - \vartheta^o)\sum_{j=1, j\neq i}^N (d_j - \vartheta^o)\right]\right\} = \\
&= \tfrac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N Var\left[d_i\right] \leq \tfrac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N \sigma^2 = \sigma^2 / N
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma^2}{N} = 0$$

$$\Downarrow$$

l'algoritmo converge in media quadratica, essendo corretto e con $\lim_{N\to\infty} Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] = 0$.

**Stimatore #2:**

$$\boxed{\hat{\vartheta}_N = d_j}$$

- è uno stimatore corretto:

$$E\left[\hat{\vartheta}_N\right] = E\left[d_j\right] = \vartheta^o$$

- non converge in media quadratica:

$$Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] = E\left[\left(\hat{\vartheta}_N - E\left[\hat{\vartheta}_N\right]\right)^2\right] = E\left[(d_j - \vartheta^o)^2\right] = Var\left[d_j\right] \leq \sigma^2$$

e quindi non varia col numero $N$ di dati

$$\Downarrow$$

l'incertezza nella stima è costante, non diminuisce al crescere del numero di dati.

**Stimatore #3 a media campionaria pesata:**

$$\hat{\vartheta}_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i$$

- è uno stimatore corretto se e solo se $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, poiché

$$E\left[\hat{\vartheta}_N\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i E\left[d_i\right] = \vartheta^o \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \vartheta^o \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

  Nota: l'algoritmo #1 corrisponde al caso $\alpha_i = \frac{1}{N}, \forall i$;

  l'algoritmo #2 corrisponde al caso $\alpha_j = 1$ e $\alpha_i = 0, \forall i \neq j$

- si dimostra che lo stimatore corretto a minima varianza è quello avente pesi

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{Var\left[d_i\right]}, \quad \alpha = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Var\left[d_i\right]}\right]^{-1}$$

  intuitivamente, i dati più incerti sono ritenuti meno affidabili $\Rightarrow$ hanno peso minore

- la varianza dello stimatore corretto a minima varianza vale

$$
\begin{aligned}
Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] &= E\left[\left(\hat{\vartheta}_N - E\left[\hat{\vartheta}_N\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i d_i - \vartheta^o\right)^2\right] = \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i d_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i \vartheta^o\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \left(d_i - \vartheta^o\right)\right)^2\right] = \\
&= E\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (d_i - \vartheta^o)^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i (d_i - \vartheta^o) \sum_{j=1, j\neq i}^N \alpha_j (d_j - \vartheta^o)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 E\left[(d_i - \vartheta^o)^2\right] + \sum_{i=1}^N \alpha_i E\left[(d_i - \vartheta^o) \sum_{j=1, j\neq i}^N \alpha_j (d_j - \vartheta^o)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Var\left[d_i\right] = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^2}{Var[d_i]^2} Var[d_i] = \alpha^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{Var[d_i]} = \\
&= \alpha = \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{Var\left[d_i\right]}\right]^{-1} \leq \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2}\right]^{-1} = \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}
$$

- l'algoritmo corretto a minima varianza converge in media quadratica, poiché

$$\lim_{N\to\infty} Var\left[\hat{\vartheta}_N\right] \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma^2}{N} = 0$$

# Disuguaglianza di Cramér-Rao

La precisione della stima ha limiti intrinseci, dovuti solo alla sorgente casuale di dati: la varianza di un qualsiasi stimatore non può infatti scendere sotto un certo valore, poiché i dati sono soggetti a disturbi e la corrispondente incertezza si riflette in una incertezza strutturale nella stima, non eliminabile cambiando il tipo di stimatore:

- nel caso scalare $\vartheta \in \mathbb{R}$, la **disuguaglianza di Cramér-Rao** afferma che, per ogni stimatore corretto $\hat{\vartheta}$,

$$Var\left[\,\hat{\vartheta}\,\right] \geq m^{-1}$$

essendo $m$ la **quantità di informazione di Fisher** definita come

$$m = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f(d^{(\vartheta)},\vartheta)\right\}^2\right]_{\vartheta=\vartheta^o} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(d^{(\vartheta)},\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta^o} \geq 0$$

$d^{(\vartheta)} \in \mathbb{R}^N$ sono i dati generati dalla sorgente casuale di dati per un generico valore $\vartheta$ del parametro ignoto, non necessariamente il valore "vero" $\vartheta^o$; $f(q,\vartheta)$, $q \in \mathbb{R}^N$, è la densità di probabilità di $d^{(\vartheta)}$;

- nel caso vettoriale $\vartheta \in \mathbb{R}^n$, la **disuguaglianza di Cramér-Rao** afferma che, per ogni stimatore corretto $\hat{\vartheta}$,

$$Var\left[\,\hat{\vartheta}\,\right] \geq M^{-1}$$

se $M$ è invertibile, essendo $M$ la **matrice di informazione di Fisher**

$$M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$m_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}\ln f(d^{(\vartheta)},\vartheta)\right]_{\vartheta=\vartheta^o}, \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n;$$

da tale disuguaglianza risulta quindi che

$$Var\left[\,\hat{\vartheta}_i\,\right] \geq \left[M^{-1}\right]_{ii}, \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

Uno stimatore corretto è **efficiente** se è a minima varianza, cioè se la sua varianza raggiunge il minimo valore teorico stabilito dalla disuguaglianza di Cramér-Rao:

$$Var\left[\,\hat{\vartheta}\,\right] = m^{-1} \quad \text{oppure} \quad Var\left[\,\hat{\vartheta}\,\right] = M^{-1}$$

# Metodo di stima ai Minimi Quadrati

*Problema*: date le misure di $n+1$ variabili reali $y(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)$ su un certo arco temporale (ad esempio, per $t = 1, 2, \ldots, N$), determinare se possibile i valori di $n$ parametri reali $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ per cui valga il legame (**regressione lineare**)

$$y(t) = \vartheta_1 u_1(t) + \ldots + \vartheta_n u_n(t)$$

In termini matriciali, definendo i vettori

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad y(t) = \varphi(t)^T \vartheta$$

Nei problemi reali, tale legame non vale mai $\Rightarrow$ c'è un errore $\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \vartheta$

$$\Downarrow$$

definendo $J(\vartheta) = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2$, il problema si risolve trovando $\vartheta^* = \arg\min_{\vartheta \in \mathbb{R}^n} J(\vartheta)$.

Per determinare il minimo della cifra di merito, occorre richiedere che

$$\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta_1} & \cdots & \frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta_n} \end{array} \right] = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta_i} = \frac{d}{d\vartheta_i}\left[\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2\right] = \sum_{t=1}^{N} \frac{d}{d\vartheta_i}\left[\varepsilon(t)^2\right] = \sum_{t=1}^{N} \frac{d}{d\vartheta_i}\left[\left(y(t) - \varphi(t)^T \vartheta\right)^2\right] =$$

$$= -2 \sum_{t=1}^{N} \left(y(t) - \varphi(t)^T \vartheta\right) u_i(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} = -2 \sum_{t=1}^{N} \left(y(t) - \varphi(t)^T \vartheta\right) \varphi(t)^T = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=1}^{N} \left(y(t)\,\varphi(t)^T - \varphi(t)^T \vartheta \varphi(t)^T\right) = \sum_{t=1}^{N} y(t)\,\varphi(t)^T - \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)^T \vartheta \varphi(t)^T = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)^T \vartheta \varphi(t)^T = \sum_{t=1}^{N} y(t)\,\varphi(t)^T \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=1}^{N} \left[\varphi(t)\,\varphi(t)^T\right] \vartheta = \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\,y(t)$$

La relazione

$$\sum_{t=1}^{N} \left[ \varphi(t)\, \varphi(t)^T \right] \vartheta = \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, y(t)$$

costituisce un sistema di $n$ equazioni scalari nelle $n$ incognite scalari $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ ed è detto sistema delle **equazioni normali**:

- se la matrice $\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, \varphi(t)^T$ è invertibile ($\Leftrightarrow \det \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, \varphi(t)^T \neq 0$, detta *condizione di identificabilità*), il sistema delle equazioni normali ammette come *unica* soluzione la **stima ai minimi quadrati (Least Squares, LS)**:

$$\hat{\vartheta} = \left[ \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, y(t) \right]$$

- se invece $\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, \varphi(t)^T$ è singolare, si dimostra che le equazioni normali hanno infinite soluzioni, a causa della loro particolare struttura.

La condizione di stazionarietà $\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} = 0$ non garantisce che $\hat{\vartheta}$ sia effettivamente un minimo di $J(\vartheta) \Rightarrow$ occorre considerare la matrice

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 J(\vartheta)}{d\vartheta^2} &= \frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta}\right]^T = \frac{d}{d\vartheta}\left[-2\sum_{t=1}^{N}\left(y(t) - \varphi(t)^T\vartheta\right)\varphi(t)^T\right]^T = \\
&= \frac{d}{d\vartheta}\left[-2\sum_{t=1}^{N}\left(y(t)\,\varphi(t)^T - \vartheta^T\varphi(t)\,\varphi(t)^T\right)^T\right] = \\
&= \frac{d}{d\vartheta}\left[-2\sum_{t=1}^{N} y(t)\,\varphi(t) + 2\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T\vartheta\right] = \\
&= 2\sum_{t=1}^{N}\frac{d}{d\vartheta}\varphi(t)\,\varphi(t)^T\vartheta = 2\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T
\end{aligned}$$

che è semidefinita positiva, in quanto $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T\frac{d^2 J(\vartheta)}{d\vartheta^2}x = x^T 2\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T x = 2\sum_{t=1}^{N} x^T\varphi(t)\,\varphi(t)^T x = 2\sum_{t=1}^{N}\left(x^T\varphi(t)\right)^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$\hat{\vartheta}$ è sicuramente un minimo (locale o globale) di $J(\vartheta)$.

Lo sviluppo in serie di Taylor di $J(\vartheta)$ nell'intorno di $\hat{\vartheta}$ permette di capire se $\hat{\vartheta}$ è un minimo locale o globale:

$$J(\vartheta) = J(\hat{\vartheta}) + \frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta}\bigg|_{\hat{\vartheta}}(\vartheta-\hat{\vartheta}) + \frac{1}{2}(\vartheta-\hat{\vartheta})^T \frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\bigg|_{\hat{\vartheta}}(\vartheta-\hat{\vartheta}) + \ldots = J(\hat{\vartheta}) + \frac{1}{2}(\vartheta-\hat{\vartheta})^T \frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\bigg|_{\hat{\vartheta}}(\vartheta-\hat{\vartheta})$$

essendo nulle sia $\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta}\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}$ ($\hat{\vartheta}$ è un minimo) sia le derivate di $J(\vartheta)$ di ordine superiore al secondo ($J(\vartheta)$ è una funzione quadratica di $\vartheta$)

$$\Downarrow$$

$$J(\vartheta) - J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{2}(\vartheta-\hat{\vartheta})^T \frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\bigg|_{\hat{\vartheta}}(\vartheta-\hat{\vartheta}), \quad \frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\bigg|_{\hat{\vartheta}} = 2\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T,$$

è una forma quadratica semidefinita positiva, essendo $\frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\Big|_{\hat{\vartheta}}$ semidefinita positiva:

- se $\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T$ è invertibile $\Rightarrow$ $\frac{d^2J(\vartheta)}{d\vartheta^2}\Big|_{\hat{\vartheta}}$ è definita positiva $\Rightarrow$ la forma quadratica è definita positiva ed è un paraboloide con un unico minimo $\Rightarrow \hat{\vartheta}$ è il minimo globale di $J(\vartheta)$;
- se $\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\,\varphi(t)^T$ è singolare $\Rightarrow$ la forma quadratica è semidefinita positiva e presenta infiniti punti di minimo locale, allineati su una retta tangente a $J(\vartheta)$.

I risultati ottenuti possono essere riscritti in forma matriciale compatta introducendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(1)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) & \dots & u_n(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(N) & \dots & u_n(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}, \quad y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \varphi(t)^T \vartheta, \quad t = 1, 2, \dots, N \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\vartheta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\,\varphi(t)^T = \Phi^T\Phi, \quad \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\,y(t) = \Phi^T y$$

$$\Downarrow$$

il sistema delle equazioni normali diventa:

$$\Phi^T\Phi\vartheta = \Phi^T y$$

che, se $\Phi^T\Phi$ è invertibile (*condizione di identificabilità*), ha come unica soluzione la stima ai minimi quadrati:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \left[\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{y}}$$

# Caratteristiche probabilistiche dello stimatore ai minimi quadrati

Ipotesi:

- vale la condizione di identificabilità: $\exists \left[\Phi^T \Phi\right]^{-1}$;
- la sorgente casuale dei dati ha la struttura

$$y(t) = \varphi(t)^T \vartheta^o + v(t)\,, \quad t = 1, 2, \ldots, N$$

dove $v(t)$ è un disturbo casuale a valor medio nullo $\Rightarrow$

si suppone che il legame fra $y$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sia effettivamente lineare $\Rightarrow$

esiste effettivamente un valore "vero" $\vartheta^o$ della grandezza incognita;

in forma matriciale compatta, si ha:

$$y = \Phi \vartheta^o + v$$

dove $v = \begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$ è una variabile casuale vettoriale avente $E\left[v\right] = \mathbf{0}$;

Sotto tali ipotesi, lo stimatore ai minimi quadrati diventa:

$$\hat{\vartheta} = [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T y = [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T(\Phi\vartheta^o + v) =$$
$$= [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T\Phi\vartheta^o + [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T v = \vartheta^o + [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T v$$

ed ha le seguenti caratteristiche probabilistiche:

- è **corretto**, avendo valor medio $E[\hat{\vartheta}] = \vartheta^o$

$$E[\hat{\vartheta}] = E\left[\left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\Phi^T y\right] = \left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\Phi^T E[y] = \left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\Phi^T E[\Phi\vartheta^o + v] =$$
$$= \left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\Phi^T(\Phi\vartheta^o + E[v]) = \left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\Phi^T\Phi\vartheta^o = \vartheta^o$$

- se $v$ è un vettore di variabili casuali a valor medio nullo fra loro incorrelate e con la stessa varianza $\sigma_v^2$ ($Var[v] = E[vv^T] = \sigma_v^2 I_N$), come nel caso di disturbo $v(\cdot)$ costituito da un rumore bianco $WN(0, \sigma_v^2) \quad \Rightarrow \quad Var[\hat{\vartheta}] = \sigma_v^2[\Phi^T\Phi]^{-1}$

$$Var[\hat{\vartheta}] = E\left[(\hat{\vartheta} - E[\hat{\vartheta}])(\hat{\vartheta} - E[\hat{\vartheta}])^T\right] = E\left[(\hat{\vartheta} - \vartheta^o)(\hat{\vartheta} - \vartheta^o)^T\right] =$$
$$= E\left[\left([\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T v\right)\left([\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T v\right)^T\right] = E\left[[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T vv^T\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\right] =$$
$$= [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T E\left[vv^T\right]\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1} = [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T\sigma_v^2 I_N\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1} =$$
$$= \sigma_v^2[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1} = \sigma_v^2[\Phi^T\Phi]^{-1}$$

- Di solito la varianza $\sigma_v^2$ del disturbo $v$ non è nota $\Rightarrow$

  sotto le stesse precedenti ipotesi, una stima "ragionevole" corretta $\hat{\sigma}_v^2$ (tale che $E[\hat{\sigma}_v^2] = \sigma_v^2$) può essere ricavata a partire direttamente dai dati come

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{J(\hat{\vartheta})}{N-n}$$

con $N =$ numero delle misure, $n =$ numero dei parametri incogniti di $\vartheta$,

$$J(\hat{\vartheta}) = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2 \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = \sum_{t=1}^{N} \left[ y(t) - \varphi(t)^T \hat{\vartheta} \right]^2 = [y - \Phi\hat{\vartheta}]^T [y - \Phi\hat{\vartheta}] =$$
$$= \left( (I_N - \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)y \right)^T (I_N - \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)y =$$
$$= y^T (I_N - \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)(I_N - \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)y =$$
$$= y^T (I_N - 2\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T + \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T\Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)y =$$
$$= y^T (I_N - \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T)y$$

$$\Downarrow$$

$$Var[\hat{\vartheta}\,] = \sigma_v^2 [\Phi^T\Phi]^{-1} \cong \hat{\sigma}_v^2 [\Phi^T\Phi]^{-1}$$

# Metodo di stima ai Minimi Quadrati Ponderati

Con il metodo di stima ai minimi quadrati si attribuisce identico rilievo a tutti gli errori, in quanto si minimizza la cifra di merito

$$J_{LS}(\vartheta) = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2, \quad \text{con} \quad \varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \vartheta, \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

Se però alcune misure sono più accurate di altre, si possono assegnare pesi diversi ai vari errori definendo la cifra di merito

$$J_{WLS}(\vartheta) = \sum_{t=1}^{N} q(t)\, \varepsilon(t)^2 = \varepsilon^T Q \varepsilon$$

dove $q(t)$ sono i coefficienti di ponderazione (o *pesi* ) per $t = 1, 2, \ldots, N$,

$$Q = \text{diag}\,(q(t)) = \begin{bmatrix} q(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & q(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

La **stima ai minimi quadrati ponderati (Weighted Least Squares, WLS)** minimizza la cifra di merito $J_{WLS}(\vartheta)$:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{WLS} = \left[\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Phi}\right]^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}}$$

Se il disturbo $v$ è un vettore di variabili casuali a valor medio nullo fra loro incorrelate e con varianza $\Sigma_v$, lo stimatore $\hat{\vartheta}_{WLS}$ ha le seguenti caratteristiche probabilistiche:

- è **corretto**, avendo valor medio $E[\hat{\vartheta}_{WLS}] = \vartheta^o$

$$E[\hat{\vartheta}_{WLS}] = E\left[\left[\Phi^T Q \Phi\right]^{-1} \Phi^T Q y\right] = \left[\Phi^T Q \Phi\right]^{-1} \Phi^T Q E[y] = \left[\Phi^T Q \Phi\right]^{-1} \Phi^T Q E[\Phi\vartheta^o + v] =$$
$$= \left[\Phi^T Q \Phi\right]^{-1} \Phi^T Q \left(\Phi\vartheta^o + E[v]\right) = \left[\Phi^T Q \Phi\right]^{-1} \Phi^T Q \Phi \vartheta^o = \vartheta^o$$

- la sua varianza vale

$$Var[\hat{\vartheta}_{WLS}] = E[(\hat{\vartheta}_{WLS} - E[\hat{\vartheta}_{WLS}])(\hat{\vartheta}_{WLS} - E[\hat{\vartheta}_{WLS}])^T] =$$
$$= E[(\hat{\vartheta}_{WLS} - \vartheta^o)(\hat{\vartheta}_{WLS} - \vartheta^o)^T] = E\left[\left([\Phi^T Q \Phi]^{-1} \Phi^T Q v\right)\left([\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Q v\right)^T\right] =$$
$$= E\left[[\Phi^T Q \Phi]^{-1} \Phi^T Q v v^T Q^T \Phi [\Phi^T Q \Phi]^{-1}\right] =$$
$$= [\Phi^T Q \Phi]^{-1} \Phi^T Q E\left[v v^T\right] Q \Phi [\Phi^T Q \Phi]^{-1} = [\Phi^T Q \Phi]^{-1} \Phi^T Q \Sigma_v Q \Phi [\Phi^T Q \Phi]^{-1}$$

  e quindi dipende dalla varianza del disturbo $\Sigma_v$;

- si dimostra che la miglior scelta di $Q$ che minimizza $Var[\hat{\vartheta}_{WLS}]$ è data da

$$Q^* = \underset{Q=\mathrm{diag}(q(t))\in\mathbb{R}^{n\times n}}{\arg\min} \; Var[\hat{\vartheta}_{WLS}] = \Sigma_v^{-1}$$

e si parla in tal caso di **stima di Gauss-Markov**:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{GM} = \left[\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \boldsymbol{\Phi}\right]^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{y}}$$

che ha come varianza

$$\begin{aligned} Var[\hat{\vartheta}_{GM}] &= [\Phi^T Q \Phi]^{-1} \Phi^T Q \Sigma_v Q \Phi [\Phi^T Q \Phi]^{-1} = \\ &= [\Phi^T \Sigma_v^{-1} \Phi]^{-1} \Phi^T \Sigma_v^{-1} \Sigma_v Q \Phi [\Phi^T \Sigma_v^{-1} \Phi]^{-1} \\ &= [\Phi^T \Sigma_v^{-1} \Phi]^{-1} \; ; \end{aligned}$$

se in particolare risulta $\Sigma_v = \sigma_v^2 I_N \quad \Rightarrow$

$$\hat{\vartheta}_{GM} = \left[\Phi^T \tfrac{1}{\sigma_v^2} I_N \Phi\right]^{-1} \Phi^T \tfrac{1}{\sigma_v^2} I_N y = \left[\Phi^T \Phi\right]^{-1} \Phi^T y = \hat{\vartheta}_{LS}$$

# Stimatori a Massima Verosimiglianza

I dati effettivi sono generati da una sorgente casuale, influenzata dall'esito $s$ di un esperimento casuale e dal valore "vero" $\vartheta^o$ della grandezza incognita da stimare.

Se però si considera un generico valore $\vartheta$ della grandezza da stimare, i dati possono essere visti come funzione sia di $\vartheta$ sia dell'esito $s$ $\Rightarrow$

si indicano con $d^{(\vartheta)}(s)$, la cui d.d.p. $f(q,\vartheta)$ è anch'essa funzione di $\vartheta$.

Sia $\delta$ una particolare osservazione dei dati, quella relativa ad un certo esito $\overline{s}$ dello esperimento casuale:

$$\delta = d^{(\vartheta)}(\overline{s})$$

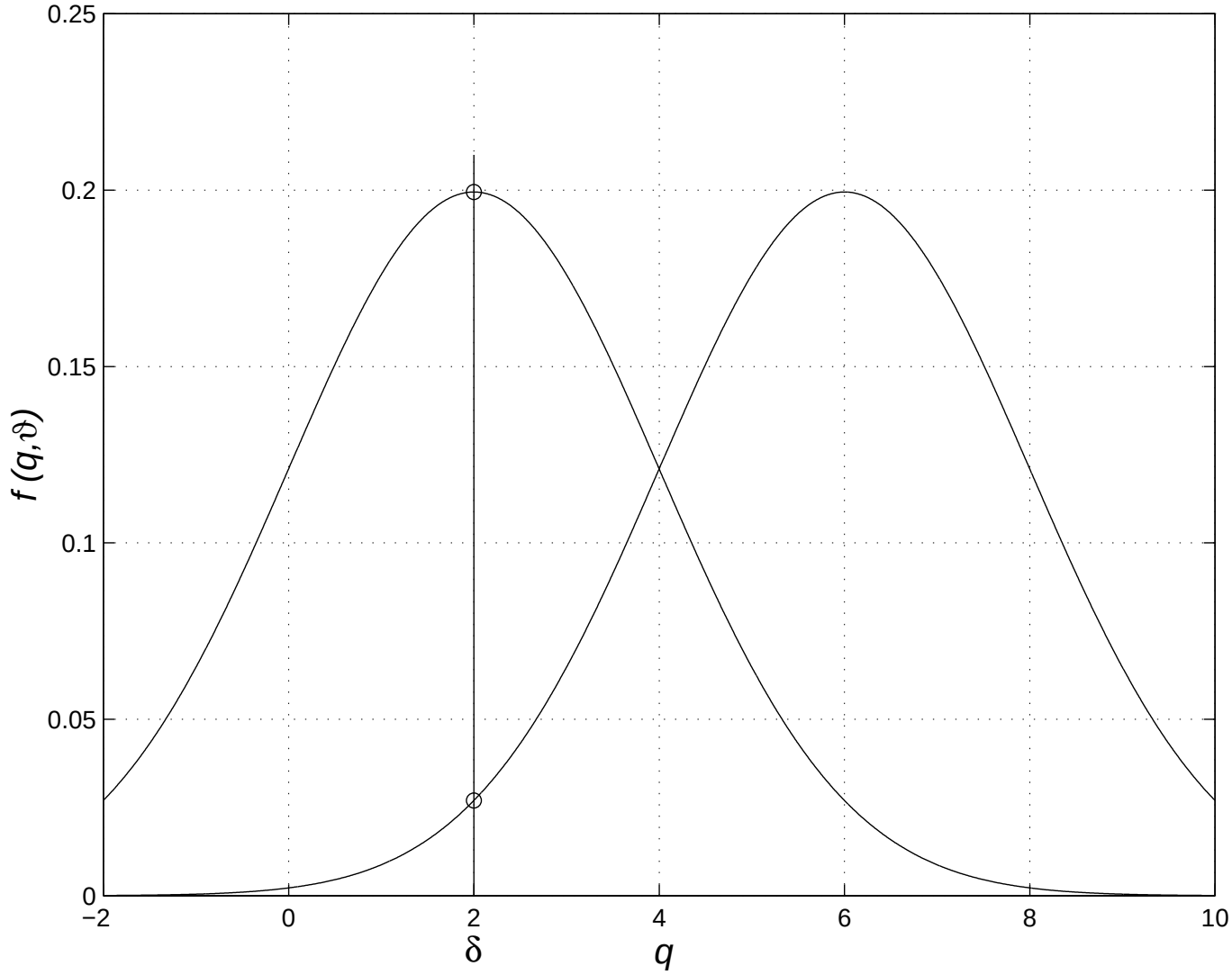
Si considera allora la **funzione di verosimiglianza** data dalla d.d.p. dei dati in $\delta$:

$$L(\vartheta) = f(q,\vartheta)|_{q=\delta}$$

Si definisce **stima a massima verosimiglianza (Maximum Likelyhood, ML)**

$$\hat{\vartheta}_{ML} = \arg\max_{\vartheta \in \mathbb{R}^n} L(\vartheta)$$

*Esempio* ($\vartheta^o$ scalare, da stimare con un'unica misura avente d.d.p. gaussiana):




al variare del valore di $\vartheta$ scelto, la gaussiana trasla $\Rightarrow$ cambia $L(\vartheta) = f(q,\vartheta)|_{q=\delta}$

# Proprietà della stima di massima verosimiglianza

$\hat{\vartheta}_{ML}$ è una stima:

- asintoticamente corretta: $E\left(\hat{\vartheta}_{ML}\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} \vartheta^o$
- asintoticamente efficiente: $\Sigma_{\hat{\vartheta}_{ML}} \leq \Sigma_{\hat{\vartheta}} \quad \forall \hat{\vartheta}$ se $N \to \infty$
- consistente: $\lim_{N \to \infty} \Sigma_{\hat{\vartheta}_{ML}} = 0$
- asintoticamente gaussiana (per $N \to \infty$)

**Esempio**: si supponga che la sorgente casuale dei dati abbia la struttura

$$y(t) = \psi(t, \vartheta^o) + v(t)\,, \quad t = 1, 2, \ldots, N \quad \Leftrightarrow \quad y = \Psi(\vartheta^o) + v$$

dove $\psi(t, \vartheta^o)$ è una generica funzione *non lineare* di $\vartheta^o$ ed il disturbo $v$ è un vettore di variabili casuali gaussiane a valor medio nullo e con varianza $\Sigma_v$, con d.d.p.

$$f(q) = \mathcal{N}(0, \Sigma_v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma_v}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} q^T \Sigma_v^{-1} q\right)$$

Poiché $v = y - \Psi(\vartheta^o) \Rightarrow$ la d.d.p. dei dati generati da una sorgente casuale in cui si considera un generico $\vartheta$ in luogo di $\vartheta^o$ è data da

$$f(q, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma_v}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} \left[q - \Psi(\vartheta)\right]^T \Sigma_v^{-1} \left[q - \Psi(\vartheta)\right]\right)$$

$$\Downarrow$$

$$L(\vartheta) = f(q, \vartheta)|_{q=\delta} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma_v}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} \left[\delta - \Psi(\vartheta)\right]^T \Sigma_v^{-1} \left[\delta - \Psi(\vartheta)\right]\right)$$

$$\Downarrow$$

$f(q,\vartheta)|_{q=\delta}$ è una funzione esponenziale in $\vartheta$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta}_{ML} = \arg\max_{\vartheta\in\mathbb{R}^n} L(\vartheta) = \arg\min_{\vartheta\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\left\{[\delta-\Psi(\vartheta)]^T \Sigma_v^{-1} [\delta-\Psi(\vartheta)]\right\}}_{R(\vartheta)}$$

Problema: bisogna trovare il minimo globale di $R(\vartheta)$ al variare di $\vartheta$, che però può presentare minimi locali se $\Psi(\vartheta)$ è una generica funzione non lineare dei parametri; gli usuali algoritmi di ottimizzazione non lineare non garantiscono di arrivare sempre al minimo globale.

*Caso particolare:* $\Psi(\vartheta) =$ funzione *lineare* dei parametri $= \Phi\vartheta$

$$\Downarrow$$

$R(\vartheta)$ è quadratica in $\vartheta$ : $R(\vartheta) = [\delta - \Phi\vartheta]^T \Sigma_v^{-1} [\delta - \Phi\vartheta]$

$$\Downarrow$$

esiste un solo minimo di $R(\vartheta)$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta}_{ML} = \left(\Phi^T \Sigma_v^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \Sigma_v^{-1} \delta = \textbf{stima di Gauss-Markov} = \hat{\vartheta}_{GM} =$$

$=$ *stima dei minimi quadrati pesati* con la covarianza degli errori

Nel caso $\Sigma_v = \sigma_v^2 I_N$ (errori *i.i.d.*, cioè indipendenti identicamente distribuiti):

$$\hat{\vartheta}_{ML} = \hat{\vartheta}_{GM} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T \delta = \textbf{stima dei minimi quadrati}$$

## Proprietà della stima di Gauss-Markov

$\hat{\vartheta}_{GM}$ è una stima:

- corretta: $E\left(\hat{\vartheta}_{GM}\right) = \vartheta^o$
- efficiente: $\Sigma_{\hat{\vartheta}_{GM}} \leq \Sigma_{\hat{\vartheta}} \quad \forall \hat{\vartheta}$
- consistente: $\lim_{N \to \infty} \Sigma_{\hat{\vartheta}_{GM}} = 0$
- gaussiana

# Metodo di stima di Bayes

Il metodo di Bayes prevede l'utilizzo sia di dati sperimentali sia di informazioni *a priori* sull'incognita del problema di stima che, se ben sfruttate, possono migliorare la stima e compensare eventuali errori di carattere casuale nei dati:

- l'incognita $\vartheta$ è vista come variabile o vettore casuale, con una certa d.d.p. a priori (ossia in assenza di ogni dato) avente un certo andamento, un certo valor medio e una certa varianza

  $\Downarrow$

  una possibile stima è il valor medio e la varianza costituisce l'incertezza a priori;
- man mano che giungono dati sperimentali, la d.d.p. di $\vartheta$ si aggiorna alla luce delle nuove informazioni, con il valor medio che cambia rispetto a quello a priori e con la varianza che dovrebbe diminuire grazie alle informazioni apportate dai dati.

Si ipotizza quindi che esista un esperimento casuale congiunto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ avente come esito congiunto la coppia di esiti singoli $s = (s_1, s_2)$ :

- l'incognita $\vartheta$ è generata da una prima sorgente casuale $\mathcal{S}_1$ in base all'esito $s_1$ di un primo esperimento casuale $\mathcal{E}_1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \vartheta(s_1)$;
- i dati $d$ sono generati da una seconda sorgente casuale $\mathcal{S}_2$, influenzata
  - dall'esito $s_2$ di un secondo esperimento casuale $\mathcal{E}_2$
  - dal valore $\vartheta(s_1)$ dell'incognita da stimare

$$d = d(s_2, \vartheta(s_1))$$

Un generico stimatore è una funzione dei dati $\hat{\vartheta} = h(d)$ ed è tanto migliore quanto più la stima $\hat{\vartheta}$ è vicina all'incognita da stimare

$$\Downarrow$$

considerando come cifra di merito

$$J(h(\cdot)) = E[\|\vartheta - h(d)\|^2]$$

lo stimatore ottimo sarà quella particolare funzione $h^*(\cdot)$ tale che

$$E[\|\vartheta - h^*(d)\|^2] \leq E[\|\vartheta - h(d)\|^2], \quad \forall h(\cdot)$$

Si dimostra che tale stimatore ottimo esiste ed è dato da:

$$h^*(x) = E\left[\vartheta \middle| d = x\right]$$

dove $x$ è il generico valore che possono assumere i dati $d$.

Lo **stimatore di Bayes** (o **stimatore a valor medio condizionato**) è la funzione

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{E}\left[\boldsymbol{\vartheta} \middle| \mathbf{d}\right]}$$

mentre la **stima di Bayes** (o **stima a valor medio condizionato**) è il valore numerico

$$\hat{\vartheta} = E\left[\vartheta \middle| d = \delta\right]$$

dove $\delta$ è il particolare valore assunto dai dati $d$ in corrispondenza di un certo esito.

# Stimatore di Bayes nel caso gaussiano

**Ipotesi**: sia i dati $d$ sia l'incognita $\vartheta$ sono variabili casuali scalari, gaussiane sia singolarmente sia congiuntamente: $\begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} \sim G\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \Sigma_{d\vartheta} = \begin{bmatrix} \sigma_{dd} & \sigma_{d\vartheta} \\ \sigma_{\vartheta d} & \sigma_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \right)$

per cui la loro d.d.p. congiunta è

$$f(d,\vartheta) = C \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} d & \vartheta \end{bmatrix} \Sigma_{d\vartheta}^{-1} \begin{bmatrix} d & \vartheta \end{bmatrix}^T \right\}, \quad C \text{ : opportuna costante}$$

Poiché

$$\det \Sigma_{d\vartheta} = \det \begin{bmatrix} \sigma_{dd} & \sigma_{d\vartheta} \\ \sigma_{\vartheta d} & \sigma_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = \sigma_{dd}\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{d\vartheta}^2 = \sigma_{dd} \left( \sigma_{\vartheta\vartheta} - \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}} \right) = \sigma_{dd}\sigma^2,$$

dove $\sigma^2 = \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{d\vartheta}^2 / \sigma_{dd}$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma_{d\vartheta}^{-1} = \frac{1}{\det \Sigma_{d\vartheta}} \begin{bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta} & -\sigma_{d\vartheta} \\ -\sigma_{\vartheta d} & \sigma_{dd} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta}/\sigma_{dd} & -\sigma_{d\vartheta}/\sigma_{dd} \\ -\sigma_{\vartheta d}/\sigma_{dd} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$f(d,\vartheta) = C\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\begin{bmatrix} d & \vartheta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta}/\sigma_{dd} & -\sigma_{d\vartheta}/\sigma_{dd} \\ -\sigma_{\vartheta d}/\sigma_{dd} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= C\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\begin{bmatrix} d & \vartheta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta}/\sigma_{dd}\, d - \sigma_{d\vartheta}/\sigma_{dd}\, \vartheta \\ -\sigma_{\vartheta d}/\sigma_{dd}\, d + \vartheta \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= C\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sigma_{dd}}d^2 - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}}d\vartheta + \vartheta^2\right)\right\}$$

La d.d.p. dei dati $d$ è invece

$$f(d) = C'\exp\left\{-\frac{d^2}{2\sigma_{dd}}\right\}, \quad C' \text{ : opportuna costante}$$

$$\Downarrow$$

la d.d.p. dell'incognita $\vartheta$ condizionata dai dati $d$ vale:

$$f(\vartheta|d) = \frac{f(d,\vartheta)}{f(d)} = \frac{C}{C'}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sigma_{dd}}d^2 - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}}d\vartheta + \vartheta^2\right) + \frac{d^2}{2\sigma_{dd}}\right\} =$$

$$= C''\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2}d^2 - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}}d\vartheta + \vartheta^2\right]\right\} = C''\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\vartheta - \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}}d\right]^2\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$f(\vartheta|d) = C'' \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\vartheta - \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d\right]^2\right\} \sim G\left(\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d,\ \sigma^2\right)$$

Lo stimatore di Bayes è la funzione

$$\hat{\vartheta} = E\left[\vartheta \middle| d\right] = \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d$$

mentre la stima di Bayes corrispondente ad un particolare dato $\delta$ è il valore numerico

$$\hat{\vartheta} = E\left[\vartheta \middle| d = \delta\right] = \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} \delta$$

Poiché $E[d] = E[\vartheta] = 0 \Rightarrow$

$$E[\hat{\vartheta}] = E\left[\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d\right] = \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} E[d] = 0$$

$$Var[\hat{\vartheta}] = E[(\hat{\vartheta} - E[\hat{\vartheta}])^2] = E[\hat{\vartheta}^2] = E\left[\frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2} d^2\right] = \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2} E\left[d^2\right] = \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}}$$

$$\begin{aligned} Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] &= E[(\vartheta - \hat{\vartheta})^2] = E[(\vartheta - \frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d)^2] = E[\vartheta^2 - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} d\vartheta + \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2} d^2] = \\ &= E\left[\vartheta^2\right] - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}} E[d\vartheta] + \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2} E\left[d^2\right] = \sigma_{\vartheta\vartheta} - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}}{\sigma_{dd}}\sigma_{d\vartheta} + \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}^2}\sigma_{dd} = \\ &= \sigma_{\vartheta\vartheta} - 2\frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}} + \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}} = \sigma_{\vartheta\vartheta} - \frac{\sigma_{d\vartheta}^2}{\sigma_{dd}} = \sigma^2 \end{aligned}$$

# Stimatore lineare di Bayes

**Ipotesi**: sia i dati $d$ sia l'incognita $\vartheta$ sono variabili casuali scalari a valor medio nullo e matrice di varianza $\Sigma_{d\vartheta} = \begin{bmatrix} \sigma_{dd} & \sigma_{d\vartheta} \\ \sigma_{\vartheta d} & \sigma_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}$.

Si desidera stimare $\vartheta$ mediante uno stimatore *lineare*, con struttura

$$\hat{\vartheta} = \alpha d + \beta$$

con $\alpha, \beta$ parametri reali stimati minimizzando

$$J = E[(\vartheta - \hat{\vartheta})^2] = E[(\vartheta - \alpha d - \beta)^2]$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} E\left[(\vartheta - \alpha d - \beta)^2\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(\vartheta - \alpha d - \beta)^2\right] = E\left[-2d(\vartheta - \alpha d - \beta)\right] =$$

$$= -2E\left[d\vartheta\right] + 2\alpha E\left[d^2\right] + 2\beta E\left[d\right] = -2\sigma_{d\vartheta} + 2\alpha\sigma_{dd} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} E\left[(\vartheta - \alpha d - \beta)^2\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(\vartheta - \alpha d - \beta)^2\right] = E\left[-2(\vartheta - \alpha d - \beta)\right] =$$

$$= -2E\left[\vartheta\right] + 2\alpha E\left[d\right] + 2\beta = 2\beta = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_{d\vartheta} / \sigma_{dd} \\ \beta = 0 \end{cases}$$